ANNÉE 1982

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE A OPTION

MATHEMATIQUES

(Durée : 3 h 00 - coefficient : 9)

---==o00o==---

Le choix de la première épreuve à option est laissé à l'initiative de chaque candidat au moment du déroulement de cette composition. Ce choix implique impérativement une option correspondante lors de la deuxième épreuve à option et plus tard lors des épreuves orales avec leurs coefficients respectifs.

Ainsi, le candidat qui choisit l'épreuve de Mathématiques commune M - P devra nécessairement composer en Mathématiques (programme M) ou Sciences physiques (programme P) lors de la deuxième épreuve à option ; de façon analogue, celui qui choisit l'épreuve de Mathématiques commune T - TA devra nécessairement composer en Technologie T (programme spécifique T) ou en Technologie TA (programme spécifique TA) lors de la deuxième épreuve à option.

---==o00o==---

T.S.V.P.

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M - P

Les parties (I) et (II) sont indépendantes - Elles interviennent dans (III) et (IV).

E est un espace vectoriel sur un corps K, espace de dimension finie, au moins égale à 2.

L(E) est l'ensemble des endomorphismes de cet espace. Suivant les cas, il sera muni de sa structure d'espace vectoriel ou de sa structure d'anneau.
ω est l'endomorphisme nul, I l'endomorphisme identique

$$\left.\begin{array}{l}\omega(\vec{x}) = \vec{0} \\ I(\vec{x}) = \vec{x}\end{array}\right\} \quad \forall \vec{x} \in E$$

Si $u \in L(E)$ et $v \in L(E)$ u et v commutent si

$$u \circ v = v \circ u$$

Si A est un sous-espace de E, u (A) désigne l'image de A par u.

A est stable pour u si $u(A) \subset A$

On rappelle qu'une partie J d'un anneau commutatif unitaire B est un idéal de B si

1) J est un sous groupe additif de B

2) $\left.\begin{array}{l}\forall j \in J \\ \forall b \in B\end{array}\right\}$ $j.b \in J$

PARTIE I

1) Soit A un sous-espace de E ; montrer que l'ensemble des endomorphismes pour lesquels A est stable, est un sous-espace de l'espace vectoriel L(E).

2) Si $A \neq \{\vec{0}\}$ $A \neq E$,
montrer qu'il existe des endomorphismes pour lesquels A n'est pas stable (il suffira de donner un exemple).

3) Si A est stable pour u et si v et u commutent, montrer que v(A) est aussi stable pour u.

PARTIE II

Soit $K[X]$ l'ensemble des polynomes à coefficients sur K ; $f \in L(E)$, fixé.

On considère l'application φ ainsi définie

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & L(E) \\ A & \longmapsto & \varphi(A) \end{array}$$

Si $A(X) = a_0 + a_1 X + \ldots\ldots\ldots + a_q X^q$

$\varphi(A) = a_0 I + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots\ldots\ldots + a_q f^q$

avec $f^2 = fof$, $f^3 = fofof$ . . .

et $\varphi(0) = \omega$ (0 étant le polynome zéro)

Si A est désigné par A(X), $\varphi(A)$ sera aussi désignée par A(f).

1) Montrer que si $K[X]$ et $L(E)$ sont munis de leur structure d'anneau, φ est un morphisme d'anneau.

2) Montrer que le noyau, ou $(\ker \varphi)$ de φ est un idéal de $K[X]$

En d'autres termes

si $J = \{P \;/\; P \in K[X] \text{ et } \varphi(P) = \omega\}$,

J est un idéal de $K[X]$

A tout élément $f \in L(E)$ correspond donc un idéal de $K[X]$, qu'on désignera par J_f

3) On rappelle que tout idéal de $K[X]$ est formé de tous les polynomes multiples d'un polynôme défini à une proportionnalité près, appelé générateur de l'idéal.

Montrer que, $\forall f \in L(E)$, un générateur de J_f ne peut être, ni le polynome 0, ni un polynome de degré 0.

4) Trouver un générateur de J_f dans les cas suivants :

a) $f = \omega$

b) $f = I$

c) $K = \mathbb{R}$, et f, rapporté à une base de E, a pour matrice

$$\text{Mat}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

d) $K = \mathbb{R}$ et f a pour matrice

$$\text{Mat}(f) = \begin{bmatrix} (0) & 1 & & 1 \\ & \ddots & & \\ 1 & & (0) & \end{bmatrix}$$

PARTIE III

On prend les deux hypothèses suivantes :

a) S est une famille non vide d'endomorphismes de E

$S \subset L(E)$, tels que les seuls sous-espaces de E stables pour tous les éléments de S à la fois sont E et $\{\vec{0}\}$.

b) $f \in L(E)$, et f commute avec tous les éléments de S.

1) Montrer que : ou $f = \lambda$, ou f est un automorphisme (on pourra partir de $f(E)$)

2) Montrer que $\forall (a_0, a_1, \ldots, a_m)$, m quelconque, $(a_0 I + a_1 f + \ldots\ldots + a_m f^m)$ commute aussi avec tous les éléments de S

3) En reprenant J_f défini au II, montrer que tout polynome générateur de J_f est premier (ou irréductible).

(A étant un tel polynome, on pourra partir de $A = A_1 \cdot A_2$ avec $\deg A_1 < \deg A$, $\deg A_2 < \deg A$ et montrer qu'on aboutit à une incompatibilité).

PARTIE IV

Des résultats obtenus dans les parties I, II, III, déduire que dans un espace vectoriel E de dimension finie, sur le corps des complexes, les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de L(E) sont de la forme λI, λ complexe quelconque.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail